

Annexe II

LA CHIRURGIE DU BONNET¹

Freud dans sa *Traumdeutung*² met en garde contre la tendance à surestimer l'importance des symboles dans les rêves, à réduire le travail d'interprétation à une traduction de symboles ; il n'existe pas de lexique des images du rêve. Pourtant Freud donne quelques exemples de tels symboles particulièrement communs. Il s'agit presque exclusivement de l'objet phallique. C'est le cas du symbole du chapeau à propos duquel il cite un joli exemple de rêve, « *Unter die Haube kommen* », venir sous le bonnet qui signifie trouver à se marier.

Venons-en au *bonnet croisé* ou *cross-cap*.

Si Lacan assigne au phallus cette place ponctuelle au centre de ce modèle topologique, c'est moins pour sa ressemblance avec l'organe mâle que pour des raisons de structure.

Remarquons que le bonnet tout entier se réduit à ce point central, à condition d'appeler *cross-cap* le plan projectif amputé d'un disque comme le faisaient traditionnellement les mathématiciens qui utilisaient cet objet. Lacan, lui, convient d'appeler *cross-cap* le plan projectif tout entier³. La ligne d'interpénétration peut se réduire en un point et nous obtenons un disque muni d'un point « mœbien », toute ligne traversant ce point passe sur l'autre face. Si nous reconstituons le plan projectif entier en recollant l'autre disque bord à bord nous obtenons une sphère

1 - Texte paru dans *Le Discours psychanalytique*, n° 18, mars-avril 1986.

2 - S. Freud, *L'Interprétation des rêves*, P.U.F., p. 309.

3 - J. Lacan, « L'Identification », 1961-1962, inédit. « L'Étourdit », *Scilicet*, n° 4, Le Seuil.

re munie d'un point mœbien ou asphère. Ce point de « fixation » donne sens (phallique) au tissu langagier qui constitue cette surface.

Lacan utilise la propriété topologique du plan projectif pour rendre compte du fait que certaines coupures du discours, à condition de faire retour en double boucle sur elles-mêmes, y détachent la rondelle de l'objet a , cause du désir [figure B-1].

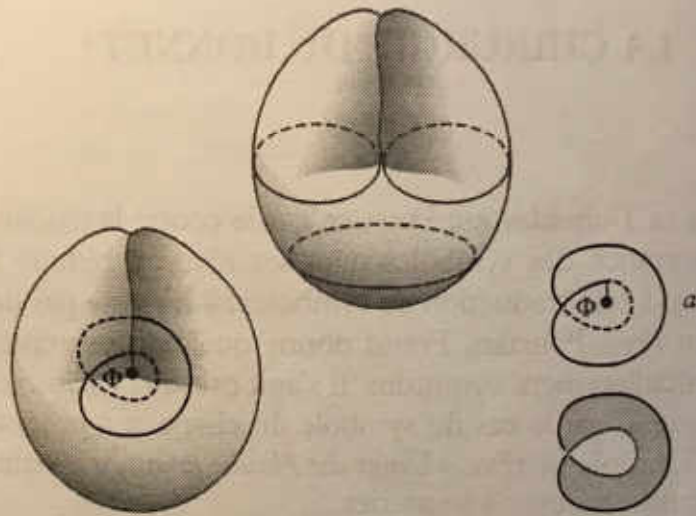


Fig. B-1

Comme la bande de Mœbius, le plan projectif est unilatère, la face endroit et la face envers peuvent se rejoindre en tout point. Nous savons que ce plan projectif peut être construit par le recollement d'une bande de Mœbius et d'un disque le long de leur bord homéomorphe à un cercle. Nous en déduisons que le bonnet croisé, modèle du plan projectif amputé d'un disque, est une bande de Mœbius. Nous nous retrouvons devant un problème de monstration; bien que par démonstration nous connaissions l'identité du bonnet et de la bande de Mœbius, il faut encore la montrer.

C'est le même type de problème que dans le retournement de la sphère, démontré en 1957 par Stephen Smale, dont il a fallu attendre plus longtemps la monstration⁴. Cette identité entre le bonnet et la bande de Mœbius rencontre immédiatement une difficulté, celle de la

4 - B. Morin et J-P Petit, «Le Retournement de la sphère», *Pour la Science*, n° 15, janvier 1979.

spécularité. Toutes les surfaces de l'univers à trois dimensions sont spéculaires, c'est-à-dire qu'il est possible de leur trouver une image dans le miroir qui n'est pas superposable à la surface elle-même. Il suffit pour cela de colorier cette surface, éventuellement de deux couleurs différentes si elle possède deux faces, et de l'orienter. C'est le cas du disque mais aussi de la bande de Mœbius. La bande de Mœbius peut en effet se différencier de son image en miroir parce que son bord peut se tordre de deux façons différentes, non superposables.

Le plan projectif, du moins son immersion dans l'espace à trois dimensions, possède la propriété remarquable d'être non spéculaire; en effet, contrairement à la bande de Mœbius, quoiqu'unilatère il est sans bord, donc il ne peut être différencié de son image en miroir. Lacan montre dans l'Identification comment la double boucle dessinée sur le plan projectif peut, grâce à une déformation continue et grâce à la ligne d'interpénétration, se traverser elle-même et rejoindre sa propre image en miroir [figure B-2].

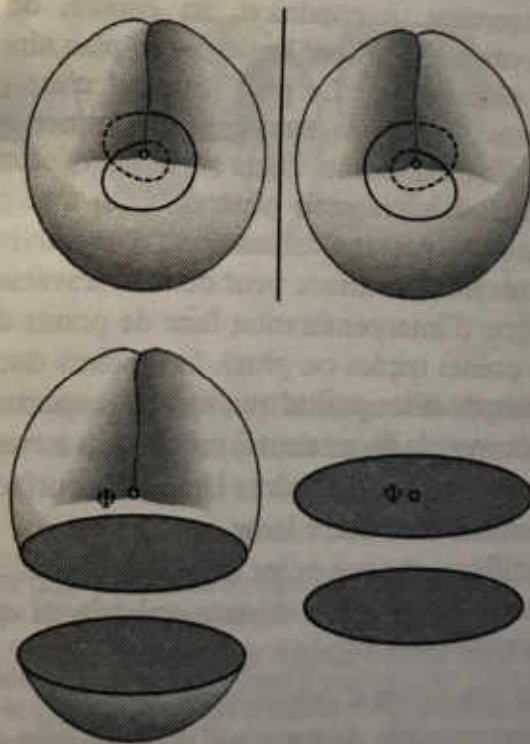


Fig. B-2

Cette double boucle sépare dans le *cross-cap* de Lacan, c'est-à-dire dans le plan projectif entier, une bande de Mœbius d'une rondelle. Cette rondelle, c'est l'objet a . Ce qui conduit Lacan à en déduire que la bande de Mœbius étant spéculaire, la propriété de non spécularité du *cross-cap* entier est passée dans la rondelle. Mais celle-ci n'est qu'un disque biface, la propriété de non-spécularité tient donc à la ligne d'interpénétration et au point central de la rondelle. Le disque de l'objet a est en somme non spéculaire parce qu'il reste un disque immergé dans l'espace à trois dimensions et non simplement plongé.

Précisons qu'en topologie il est possible de traiter des propriétés d'une surface en elle-même, intrinsèquement, mais aussi des propriétés de cette surface selon l'espace dans lequel elle est plongée. Dans le cas des plongements dans cet espace à trois dimensions, il s'agit de déformations continues de la surface sans déchirure ni pli, c'est-à-dire sans cassure du plan tangent.

Dans le cas de l'immersion, il s'agit d'homotopie régulière, c'est-à-dire que la surface peut se traverser elle-même contrairement à la déformation de plongement, à condition, ici encore, de respecter les contraintes de continuité qui sont imposées au plan tangent lors d'une déformation de plongement. Le plan projectif n'est pas plongeable dans l'espace à trois dimensions, tandis que son immersion est possible; c'est le modèle utilisé par Lacan. Dans ses derniers séminaires il introduit encore un nœud borroméen généralisé qui a la propriété de se défaire par homotopie, par une déformation d'immersion.

Dans une immersion la surface peut donc se traverser elle-même; il en résulte une ligne d'interpénétration faite de points doubles (il peut aussi exister des points triples ou plus). Ces points doubles consistent en la superposition de deux points qui, tout en appartenant à la même surface sont localement indépendants; un chemin traversant cette ligne d'autotraversée reste alors sur la même lame de la surface, il ne peut pas bifurquer brutalement sur l'autre lame.

Comme le signifiant, chaque point double est différent de lui-même. Nous allons voir que la propriété de non-spécularité qui définit l'objet a comme faisant trou dans l'image spéculaire, tient à cette immersion et à l'existence de ces lignes d'autotraversée.

D'une part il est possible de passer d'une rondelle, c'est-à-dire d'un

disque muni d'une ligne d'autotraversée, à son image en miroir par simple déformation d'homotopie ou d'immersion, ce qui correspond à la non-spécularité de l'objet *a* [figure B-3]. Nous allons montrer d'autre

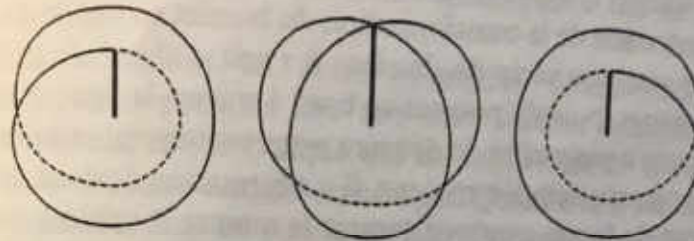


Fig. B-3

part qu'il en est de même de la bande de Mœbius. Nous avons déduit l'identité de la bande de Mœbius de ce que les mathématiciens appellent *cross-cap*, c'est-à-dire le plan projectif ou le *cross-cap* de Lacan moins un disque. Or, il semble bien que ce bonnet croisé soit non spéculaire; en effet, il est unilatère et, si le bord peut être orienté par simple retournement, nous passons à l'image en miroir [figure B-4]⁵.

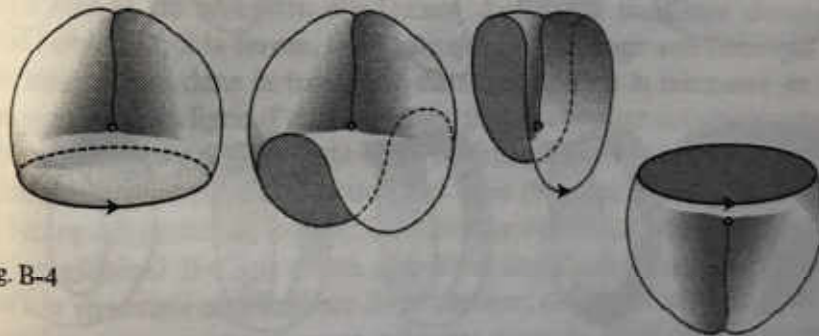


Fig. B-4

Ou encore, si nous réduisons la ligne d'interpénétration au point hors ligne, nous obtenons un disque muni de ce point. Ce disque est

5 - Remarquons que dans cette transformation, les deux extrémités de la ligne d'interpénétration échangent leurs rôles respectifs, elles ont, en effet, le même statut topologique, mais cela remet en question le privilège que Lacan accorde au point central du *cross-cap*, mais cela remet en question le privilège que Lacan accorde au point central du *cross-cap*, à moins de transférer ce privilège à la ligne d'autotraversée toute entière, puisque celle-ci peut se réduire en un point. Dans cet article de 1986, je n'avais pas tiré toutes les conséquences du caractère irrégulier de l'immersion du *cross-cap*, voir *supra* p 249 (note 2003).

unilatère, il ne peut être que d'une seule couleur sur ses deux faces, le point en question permettant le passage d'une face l'autre. Si bien que l'orientation du bord ne permet plus de différencier ce disque d'un disque en miroir, contrairement au disque normal bicolore.

La monstration de la transformation du bonnet en bande de Mœbius est donnée par une série de dessins; il s'agit d'abord de déformer le bord du bonnet, puis de pousser ce bord à travers la ligne d'interpénétration, ce qui a pour effet de détruire progressivement cette ligne, dans un premier temps scindée en deux. Il y a formation de deux oreilles qui se réduisent de façon continue comme le montre le schéma qui détaille cette opération [figure B-5].

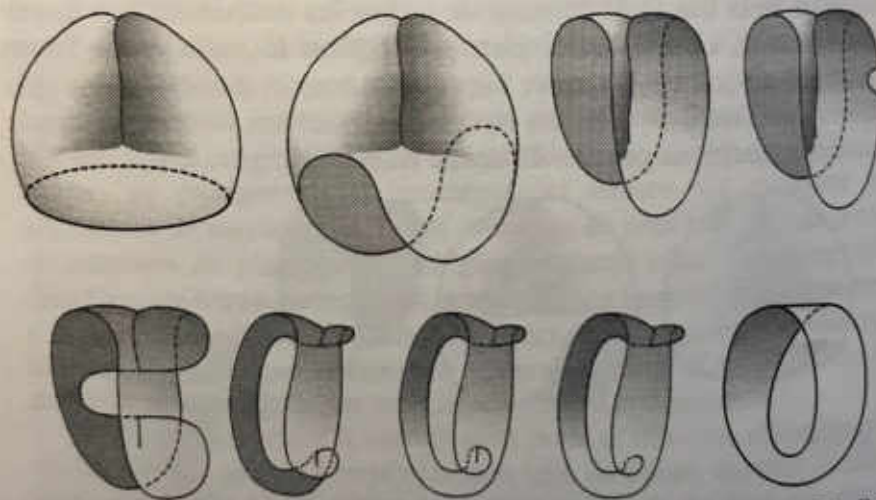


Fig. B-5

Transformation du bonnet croisé en bande de Mœbius.

Nous constatons immédiatement qu'il est possible par cette opération de passer d'une bande de Mœbius droite à une bande de Mœbius gauche. Nous voyons aussi comment Lacan situait dans le «schéma R» les catégories du Réel, du Symbolique et de l'Imaginaire sur le plan projectif. La structure du plan projectif relève d'un Réel, c'est la coupe en double boucle qui est identique à la bande de Mœbius et qui

constitue la surface entière faite de lignes sans point. Cette coupure du Réel cerne et sépare Symbolique et Imaginaire aux deux faces du disque de l'objet a . Le point Φ est ce qui persiste du Réel de cette topologie lorsque la surface prend la forme sphérique; il fait de cette sphère une asphère.

Si nous nommons les deux premières dimensions, Réel et Symbolique, nous pouvons dire que cette surface consiste dans ces deux dimensions, le Symbolique qui en est l'étoffe et le Réel qui en détermine la structure comme asphérique. Quant à la troisième dimension, l'Imaginaire, dans un sens la surface n'y existe pas, elle y fait trou puisqu'elle n'y est pas plongeable. Dans un autre sens nous pouvons dire que la propriété de non-spécularité n'apparaît que dans le champ de la spécularité qui tient à cette troisième dimension imaginaire. Cette non-spécularité est le résultat de l'interaction du Réel et du Symbolique, d'une part, avec l'Imaginaire, d'autre part. Elle tient à l'incompatibilité d'une certaine structure bidimensionnelle avec la troisième dimension imaginaire.

La bande de Mœbius, elle, existe dans cette troisième dimension, c'est l'objet a qui la ferme, le disque qui s'appuie sur son bord qui n'est pas imaginable dans la troisième dimension, d'où la nécessité de l'immersion et de la ligne d'autotraversée pour présenter cet objet a dans le champ de l'imaginaire. Cette ligne est imaginaire, mais elle est entièrement structurée par l'interaction des trois dimensions.

Notre opération du bonnet est-elle une opération réelle, symbolique ou imaginaire? Il s'agit d'une opération imaginaire, nous ne touchons pas à la structure topologique de la surface; cette structure ne peut être modifiée que par une coupure, relevant donc du Réel, tout en se manifestant dans l'étoffe symbolique du discours. Pourtant notre opération imaginaire est entièrement commandée par la structure même de la surface symbolique et du bord réel.